**Універсальні функції**

Нехай *ℑ* –система часткових одномісних функцій.

Часткова функція *F*(*x*, *y*) від двох змінних називається універсальною для сімейства *ℑ*, якщо виконуються наступні умови:

1. Для кожного фіксованого *i* функція *F*(*i*, *y*) належить *ℑ*;

2. Для кожної функції *f*(*y*) із *ℑ* існує таке число *i*, що для всіх *y* *F*(*i*, *y*) = *f*(*y*).

**10.1. Універсальна рекурсивна функція**

**Теорема 10.1.** Система всіх одномісних ПР функцій має універсальну рекурсивну функцію.

Така функція позначається через *D*(*n*, *x*) і має наступні властивості:

1. Для кожного фіксованого  одномісна функція *D*(*n*, *x*) є ПР функцією.

2. Для кожної одномісної ПР функції *f*(*x*) існує число *n* таке, що *D*(*n*, *x*) = *f*(*x*).

**Наслідок.** Функція *Dn*+1(*x*0, *x*1, …, *xn*) = *D*(*x*0, ***c***(*x*1, …, *xn*)) є рекурсивною функцією універсальною для класу *n*-місних ПРФ .

**10.2. Універсальна ЧРФ**

**Теорема 10.2.** Кожна ЧРФ *f*(*x*1, … , *xn*) може бути обчислена алгоритмом:

function *f* (*x*1, ... , *xn*)

begin

*i* := 0

while *F*(*x*1, ... , *xn*, *i*) ≠ 0 do

*i* := *i* +1

*f* := *G*(*i*)

end,

де *F*, *G* деякі (залежні від *f*) ПРФ.

Доведення. Якщо *f* – ЧРФ, то її графік *Gf* є РПМ. Тому *Gf* = <*f*1(*x*), … , *fn*(*x*), *fn*+1(*x*)>, *x* = 0, 1, 2, … , а *fi* – ПРФ. Покладемо

*F*(*x*1, … , *xn*, *i*) = ⎢*f*1(*i*) – *x*1 ⎢+ … + ⎢*fn*(*i*) – *xn*)⎢, a

*G*(*x*) = *fn*+1(*x*).

Якщо *f* в точці <*x*1, ... , *xn*> визначена, то ця точуа належить *Gf*, a, отже, існує *і* таке, що *F*(*x*1, … , *xn*, *i*) = 0. Значення функції *f* в цьому випадку дорівнює *fn*+1(*i*). Якщо *f* в точці <*x*1, ... , *xn*> не визначена, то алгоритм працює нескінченно довго.

**Зауваження.** Теорему 1 можна сформулювати і так: кожна ЧРФ *f* (*x*1, ... , *xn*> може бути представлена у формі

*f*( *x*1, ... , *xn* ) = *G*(*μi*(*F*(*x*1, … , *xn*, *i*) = 0)).

**Теорема 10.3.** Кожна ЧРФ *f*(*x*) може бути обчислена алгоритмом

function *f*(*x*)

begin

*i* := 0

while *F*(*x*, *i*) ≠ 0 do

*i* := *i* + 1

*f* := ***l***(*i*)

end,

де *F* – деяка (залежна від *f*) ПРФ.

Доведення. Існує ПРФ *g*(*a*, *b*, *z*) така, що рівняння *g*(*a*, *b*, *z*) = 0 має розв’язок ⇔ <*a*, *b*> ∈ *Gf*. Графік *Gf*функції *f* є РПМ. Тому часткова характеристична функція для *Gf* обчислюється наступним алгоритмом:

function χ*G*(*x*, *y*)

begin

*i* := 0

while *g*(*x*, *y*, *i*) ≠ 0 do

*i* := *i* + 1

χ*G* := 0

end,

Покладемо *F*(*x*, *i*) = *g*(*x*, ***l***(*i*), ***r***(*i*)). Тоді функція *f* може бути обчислена наступним алгоритмом:

function *f*(*x*)

begin

*i* := 0

while *F*(*x*, *i*) ≠ 0 do

*i* := *i* + 1

*f* := ***l***(*i*)

end.

Дійсно, нехай функція *f* визначена в точці *x*0. Тоді пара <*x*0, *f*(*x*0) > ∈ *Gf*. Тому рівняння

*g*(*x*0, *f*(*x*0), *z*) = 0

має розвязок *z*0. Нехай ***c***(*f*(*x*0), *z*0) = *i*. Тоді *f*(*x*0) = ***l***(*i*), *z*0 = ***r***(*i*).

Якою б не була пара <*f*(*x*0), z0)> завжди існує *і* – номер цієї пари (***с*** – бієкція).

**Теорема 10.4.** Кожна ЧРФ *f*(*x*) може бути обчислена алгоритмом

function *f*(*x*)

begin

*i* := 0

while *D*(*n*, *x*, *i*) ≠ 0 do

*i* := *i* + 1

*f* := ***l***(*i*)

end,

де *n* – деяке (залежне від *f*) натуральне число.

Доведення. Випливає із теореми 10.1 (*D* – універсальна для класу двохмісних ПРФ).

**Зауваження.** Можна розглянути алгоритм:

function *f*(*x*) function *Т*(*n*, *x*)

begin begin

*f* := *Т*(*n*, *x*) *i* := 0

end while *D*(*n*, *x*, *i*) ≠ 0 do

*i* := *i* + 1

*Т* := ***l***(*i*)

end.

Тоді кожна ЧРФ може бути об числена через функцію *Т*(*n*, *x*) для деякого *n*. Отже, *Т*(*n*, *x*) – універсальна.

**11**

**Довизначення функцій**

Часткова функція *g*(*x*1, ... , *xs*) називається розширенням часткової функції *f*( *x*1, ... , *xs*), якщо в кожній точці, в якій функція *f* визначена, функція *g* також визначена і її значення в цій точці дорівнює значенню функції *f*.

Всюди визначене розширення часткової функції *f* називається довизначенням *f*. Зрозуміло, що кожна часткова функція має довизначення. Ситуація змінюється, коли шукають не довільні довизначення, а рекурсивні.

**11.1. Нерекурсивні функції**

**Теорема 11.1.** Існує одномісна ЧРФ, яка приймає значення 0,1 і не має рекурсивних довизначень

Доведення. Розглянемо функцію



де *U*(*x*, *y*) – універсальна для всіх одномісних ЧРФ. Функція *V*(*x*) – ЧРФ. Покажемо, що вона не може мати рекурсивних довизначень.

Розглянемо функцію



Ця функція є довизначенням *V*(*x*). Покажемо, що не існує алгоритму, який її обчислює. Припустимо, що такий алгоритм існує, тобто функція *w*(*x*) – рекурсивна. Це означає, що

*w*(*x*) = *U*(*m*, *x*)

для деякого *m*. Тобто, цю функцію можна обчислити в довільній точці алгоритмом А1:

A1: function *w*(*x*) function *U*(*n*, *x*)

begin begin

*w* := *U*(*m*, *x*) *i* := 0

end while *D*(*n*, *x*, *i*) ≠ 0 do

*i* := *i* + 1

*U* := ***l***(*i*)

end.

Обчислимо значення функції *w* в точці *m*. Якщо *w*(*m*) = 0, то *U*(*m*, *m*) = 0 (оскільки *w*(*m*) = *U*(*m*, *m*)). З іншого боку, якщо *w*(*m*) = 0, то *U*(*m*, *m*) > 0 (визначення функції *w*). Якщо *w*(*m*) = 1, то *U*(*m*, *m*) = 1 (оскільки *w*(*m*) = *U*(*m*, *m*)). З іншого боку, якщо *w*(*m*) = 1, то *U*(*m*, *m*) = 0 або *U*(*m*, *m*) не визначена (визначення функції *w*). В обох випадках одержали суперечність. Отже, алгоритм А1 функцію *w* не обчислює.

**Теорема 11.2.** Ніяка ЧРФ *U*(*x*,*y*) універсальна для сукупності всіх одномісних ЧРФ не може мати рекурсивних довизначень.

Доведення. Припустимо, що функція *U*(*x*,*y*) має рекурсивне довизначення *P*(*x*, *y*). Тоді функція



буде рекурсивним довизначенням функції *V*(*x*) з теореми 10.1. Дійсно, якщо *U*(*x*, *x*) > 0, то *P*(*x*, *x*) > 0, а, отже, *w*(*x*) = *V*(*x*) = 0. Якщо *U*(*x*, *x*) = 0, то *Р*(*x*, *x*) = 0, а, отже, *w*(*x*) = *V*(*x*) = 1. Якщо *U*(*x*, *x*) – не визначена, то *w*(*x*) = 1 ( при *Р*(*x*, *x*) = 0) і *w*(*x*) = 0 (при *P*(*x*, *x*) > 0). Крім того, *w*(*x*) – рекурсивна. Дійсно, цю функцію можна обчислити алгоритмом:

function *w*(*x*)

begin

if *P*(*x*, *x*) > 0 then *w* := 0

else *w* := 1

end.

**Теорема 11.3.** Існують не рекурсивні РПМ.

Доведення. Нехай



Ця функція є ЧРФ, приймає значення 0,1 і не має рекурсивних довизначень. Множина розв’язків рівняння *V*(*x*) = 0 за наслідком 8.5 є РПМ. Припустимо, що ця множина рекурсивна і нехай χ – характеристична функція цієї множини. Тоді існує алгоритм, який обчислює значення цієї функції:

function χ(*x*) function *U*(*n*, *x*)

begin begin

χ:= *U*(*m*, *x*) *i* := 0

end while *D*(*n*, *x*, *i*) ≠ 0 do

*i* := *i* + 1

*U* := ***l***(*i*)

end.

Оскільки

χ(*x*) = 0 ⇔ *V*(*x*) = 0 ⇔ *U*(*x*, *x*) > 0 ⇔ *w*(*x*) = 0,

а

χ(*x*) = 1 ⇔ *V*(*x*) ≠ 0 ⇔ *w*(*x*) = 1,

то існує алгоритм, який обчислює функцію *w*(*x*):

function *w*(*x*)

begin

if χ(*x*) = 0 then *w* := 0

else *w* := 1

end,

тобто функція *w* рекурсивна. Але це не так (теорема 10.1).

Зауваження. Множина розв’язків рівняння *V*(*x*) = 0 не є порожньою. Дійсно, *x* + 1 = *g*(*x*) = *U*(*n*, *x*). Тоді *U*(*n*, *n*) = *n* + 1 > 0. Тому *V*(*n*) = 0.

**Теорема 11.4.** Якщо область визначення *М* ЧРФ *f*(*x*) рекурсивна, то *f*(*x*) має рекурсивне довизначення.

Доведення. Функція



де χ(*x*) – характеристична для *М*, буде довизначенням функції *f*(*x*). Крім того, ця функція алгоритмічно обчислювана, наприклад, таким алгоритмом:

function *g*(*x*)

begin

*i* := 0

*j* := 0

while *β*1(*i*) ≠ *x* do *i* := *i* + 1

if *β*2(*i*) = 0 then

begin

while *α*1(*j*) ≠ *x* do *j* := *j* + 1

*g* := *α*2(*j*)

end

else *g* := 0

end,

де <*α*1(*t*), *α*2(*t*) > – графік *f*(*x*), <*β*1(*t*), *β*2(*t*) > – графік χ(*x*).

Зауваження. Алгоритм не циклить, бо якщо *β*2(*i*) = 0, то *β*1(i) = *x* ∈ *М* –

область визначення функції *f*.

**Теорема 11.5.** Якщо ЧРФ *U*(*x*, *y*) є універсальною для всіх одномісних ЧРФ, то область визначення *М* цієї функції є нерекурсивною РПМ.

Доведення. Множина *М* – РПМ, як область визначення ЧРФ. Якби ця множина була рекурсивною то за теоремою 11.4 функція *U*(*x*, *y*) мала б рекурсивне довизначення. На підставі теореми 11.2 такого довизначення функція *U*(*x*, *y*) мати не може.

Зауваження. Питання про те чи існує алгоритм, який для довільної ЧРФ *f* і довільного *x* дає відповідь на питання про те, чи *f* в точці *x* визначена зводиться до питання – чи є рекурсивною область визначення ЧРФ *f*. Такого алгоритму не існує. Якби такий алгоритм існував, то існував би і алгоритм, який давав би відповідь на питання про те, чи визначена в довільній точці <*n*, *х*> функція *T*(*n*, *x*), де *T* – універсальна для одномісних ПРФ. Але область визначення універсальної функції нерекурсивна.

**12**

**Універсальні функції Кліні**

При вивченні властивостей ЧРФ іноді зручніше користуватися не універсальними функціями *T*(*x*0, *x*1, …, *xn*), а особливими функціями Кліні.

Введемо функції:

*K*2(*x*0, *x*1) = *T*2 (***l***(*x*0), ***c***(***r***(*x*0), *x*1))

*K*3(*x*0, *x*1, *x*2) = *K*2 ([(*x*0, *x*1], *x*2)),

де [*x*0, *x*1] = ***c***(***l***(*x*0), ***c***(***r***(*x*0), *x*1)) – нумерація пар натуральних чисел.

**Лема.** Функції *K*2(*x*0, *x*1) і *K*3(*x*0, *x*1, *x*2) зв’язані з універсальними функціями *Т*3(*x*0, *x*1, *x*2) та *Т*4(*x*0, *x*1, *x*2, *x*3) тотожностями:

1) *K*2(***c***(*x*0, *x*1), *x*2)= *Т*3(*x*0, *x*1, *x*2).

2) *K*3(***c***(*x*0, *x*1), *x*2, *x*3) = *Т*4(*x*0, *x*1, *x*2, *x*3).

Доведення. 1) Функція *Т*2(*x*0, *x*1) зв’язана з функцією *Т*3(*x*0, *x*1, *x*2) тотожністю:

*T*2(*x*0, ***c***(*x*1, *x*2)) = *T*3(*x*0, *x*1, *x*2).

Дійсно,

*Т*2(*x*0, ***c***(*x*1, *x*2)) = ***l***(*μt*(*D*3(*x*0, ***c***(*x*1, *x*2), *t*) = 0)) =

= ***l***(*μt*(*D*2(*x*0, ***c***(***c***(*x*1, *x*2), *t*)) = 0)) =

= ***l***(*μt*(*D*2(*x*0, ***c***(*x*1, *x*2, *t*)) = 0)) =

= ***l***(*μt*(*D*4(*x*0, *x*1, *x*2, *t*)) = 0)) =

= *T*3(*x*0, *x*1, *x*2).

Тому

*K*2(***c***(*x*0, *x*1), *x*2) = *Т*2(***l***(***c***(*x*0, *x*1), ***c***(***r***(***c*** (*x*0, *x*1), *x*2)) =

= *T*2((*x*0, ***c***(*x*1, *x*2)) = *Т*3(*x*0, *x*1, *x*2).

2) Функція *T*3(*x*0, *x*1, *x*2) зв’язана з функцією *T*4(*x*0, *x*1, *x*2, *x*3) тотожністю:

*T*3(*x*0, ***с***(*x*1, *x*2), *x*3) = *T*4(*x*0, *x*1, *x*2, *x*3).

Дійсно,

*T*3(*x*0, ***с***(*x*1, *x*2), *x*3) = ***l***(*μt* (*D*4(*x*0, ***c***(*x*1, *x*2), *x*3), *t*) = 0)) =

= ***l***(*μt*(*D*2(*x*0, ***c***(***c***(*x*1, *x*2), *x*3, *t*) = 0)) =

= ***l***(*μt*(*D*2(*x*0, ***c***(*x*1, *x*2, *x*3, *t*) = 0)) =

= *T*4(*x*0, *x*1, *x*2, *x*3).

Тому,

*K*3(***c***(*x*0, *x*1), *x*2, *x*3) = *K*2([***c***(*x*0, *x*1), *x*2], *x*3) =

= *K*2(***c***(***l***(***c***(*x*0, *x*1), ***c***(***r***(***c***(*x*0, *x*1), *x*2)), *x*3) =

= *K*2(***c***(*x*0, ***c***(*x*1, *x*2)), *x*3) = *T*3(*x*0, ***с***(*x*1, *x*2), *x*3) =

= *T*4(*x*0, *x*1, *x*2, *x*3).

**Теорема 12.1.** Функція Кліні *K*2(*x*0, *x*1) є ЧРФ, універсальною для всіх одномісних ЧРФ.

Доведення. Якщо *f*(*x*) – довільна ЧРФ, то для функції *g*(*y*, *x*) = *f*(*x*) + 0⋅*y* справедливе співвідношення

*g*(*y*, *x*) = *T*3(*a*, *y*, *x*) = *K*2(***c***(*a*, *y*), *x*).

Поклавши *y* = 0 і позначивши ***c***(*a*, 0) = *b*, одержимо *f*(*x*) = *K*2(*b*, *x*).

**Теорема 12.2.** Функція Кліні *K*3(*x*0, *x*1, *x*2) є ЧРФ, універсальною для всіх двомісних ЧРФ.

Доведення. Якщо *f*(*x*, *y*) – довільна ЧРФ, то для функції *g*(*z*, *x*, *y*) = 0⋅*z* + *f*(*x*, *y*) справедливе співвідношення

*g*(*z*, *x*, *y*) = *T*4(*a*, *z*, *x*, *y*) = *K*3(***c***(*a*, z), *x*, *y*).

Поклавши *z* = 0 і позначивши ***c***(*a*, *z*) = *b* одержимо

*f*(*x*, *y*) = *g*(*x*, *y*, *z*) = *K*3(*b*, *x*, *y*).

Відображення, яке кожному натуральному числу *n* ставить у відповідність одномісну ЧРФ *K*(*n*, *x*) називати нумерацією Кліні одномісних ЧРФ. Число *n* називається клінівським номером функції *K*(*n*, *x*), яка також позначається через *Kn*.

**Теорема 12.3.** Для кожної ЧРФ *f*(*x*) існує число *а* таке, що всі числа послідовності

[*a*, 0], [*a*, 1], …, [*a*, *m*], …

будуть клінівськими номерами функції *f*(*x*).

Доведення. За умовою

*f*(*x*) = *K*(*n*, *x*) = 0⋅*y* + *f*(*x*) = *K*(*a*, *y*, *x*) = *K*([*a*, *y*], *x*).

Тому числа послідовності є номерами функції *f*(*x*).

**Теорема 12.4.** Для будь-якої ЧРФ *f*(*x*, *y*) існує рекурсивна функція *s*(*x*) така, що

*f*(*x*, *y*) = *K*(*s*(*x*), *y*).

Доведення. Випливає із співвідношень:

*f*(*x*, *y*) = *K*3(*n*, *x*, *y*) = *K*2([*n*, *x*], *y*). Залишилось покласти *s*(*x*) = [*n*, *x*].

Нумерація [*x*0, *x*1, *x*2] трійок натуральних чисел задається як

[*x*0, *x*1, *x*2] =[[*x*0, *x*1], *x*2].

**Теорема 12.5** (Кліні про нерухому точку). Для кожної ЧРФ *h*(*x*) існує число *а* таке, що

*K*(*h*(*a*), *x*) = *K*(*a*, *x*).

Доведення. Розглянемо функцію *K*(*h*([*y*, *y*]), *t*). Тоді

*K*(*h*([*y*, *y*]), *t*) = *K*(*b*, *y*, *t*) = *K*([*b*, *y*], *t*).

Покладемо *y* = *b*. Тоді

*K*(*h*([*b*, *b*], *t*) = *K*([*b*, *b*], *t*)

Якщо позначити [*b*, *b*] = *а*, то одержимо

*K*(*h*(*а*), *t*) = *K*(*а*, *t*).

**Теорема 12.6** (Райса). Якщо *ℑ* – непусте сімейство одномісних ЧРФ, відмінне від сукупності всіх таких функцій, то множина *А* клінівських номерів функцій, що належить *ℑ*, не може бути рекурсивною.

Доведення. Нехай *А* – рекурсивна. Тоді рекурсивною буде і множина *А*. Оскільки ℑ і  – не пусті, то *А* і *А* – не пусті. Виберемо в *А* і *А* по одному числу *а*, *b* і визначимо функцію

.

Ця функція рекурсивна (*g*(*x*) = *a* χ(*x*) + *b*χ(*x*), де χ(*x*) – характеристична для *А*). За теоремою про нерухому точку існує число *n* таке, що *K*(*g*(*n*), *x*) = *K*(*n*, *x*). Але тоді якщо *n* ∈ *A*, то *K*(*n*, *x*) ∈ ℑ і тому *K*(*g*(*n*), *x*) ∈ ℑ. З іншого боку, якщо *n* ∈ *A*, то *g*(*n*) = *b*, тому *K*(*g*(*n*), *x*) = *K*(*b*, *x*) ∈ .

Одержали суперечність. Аналогічно *n* не може належати *А*.

Зауваження. З теореми Райса випливає, що не існує алгоритму, який по номеру Кліні ЧРФ дасть відповідь на питання про належність цієї функції до класу, наприклад, ПРФ.